

初中数学常用的概念、公式和定理

1. **整数**(包括:正整数、0、负整数)和**分数**(包括:有限小数和无限环循小数)都是有理数. 如: $-3, 0.231, 0.737373\cdots, \dots$ 无限不 $\sqrt[3]{53}$ 环循小数叫做**无理数**. 如: $\pi, -\sqrt{2}, 0.1010010001\cdots$ (两个1之间依次多1个0). 有理数和无理数统称为**实数**.

2. **绝对值**: $a \geq 0 \mid |a| = a; a \leq 0 \mid |a| = -a \iff a$.

如: $|-1| = 1; |3.14 - \pi| = \pi - 3.14. \quad \sqrt{2}$

3. 一个**近似数**, 从左边第一个不是0的数字起, 到最末一个数字止, 所有的数字, 都叫做这个近似数的**有效数字**. 如: 0.05972精确到0.001得0.060, 结果有两个有效数字6, 0.

4. 把一个数写成 $\pm a \times 10^n$ 的形式 (其中 $1 \leq a < 10, n$ 是整数), 这种记数法叫做**科学记数法**.

如: $-40700 = -4.07 \times 10^5, 0.000043 = 4.3 \times 10^{-5}$.

5. **被开方数的小数点每移动2位**, 算术平方根的小数点就向相同方向移动1位; 被开方数的小数点每移动3位, 立方根的小数点就向相同方向移动1位.

如: 已知 $\sqrt{0.4858} = 0.6968$, 则 $\sqrt{48.58} = 6.968$; 已知 $\sqrt[3]{0.00378} = 0.1558$, 则 $\sqrt[3]{378} = 7.23$.

=1.558, 则=0.1588.

6. **整式的乘除法**:

①几个单项式相乘除, 系数与系数相乘除, 同底数的幂结合起来相乘除.

②单项式乘以多项式, 用单项式乘以多项式的每一个项.

③多项式乘以多项式, 用一个多项式的每一项分别乘以另一个多项式的每一项.

④多项式除以单项式, 将多项式的每一项分别除以这个单项式.

7. **幂的运算性质**:

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$. ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$. ③ $(a^m)^n = a^{mn}$. ④ $(ab)^n = a^n b^n$.

⑤ $()^n = n$. ⑥ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, 特别: $()^{-n} = \frac{1}{()^n}$. ⑦ $a^0 = 1 (a \neq 0)$.

如: $a^3 \times a^2 = a^5, a^6 \div a^2 = a^4, (a^3)^2 = a^6, (3a^3)^2 = 9a^6, (-3)^{-1} = -\frac{1}{3}, 5^{-2} = \frac{1}{25}, ()^{-2} = \frac{1}{()^2}, (-3.14)^0 = 1, (-)^0 = 1$.

8. **乘法公式**(反过来就是因式分解的公式):

① $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. ② $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. ③ $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

④ $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3; a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab, (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$.

9. 选择**因式分解**方法的原则是: 先看能否提公因式. 在没有公因式的情况下: 二项式用平方差公式或立方和差公式, 三项式用十字相乘法(特殊的用完全平方公式), 三项以上用分组分解法. 注意: 因式分解要进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.

10. **分式的运算**: 乘除法要先把分子、分母都分解因式, 并颠倒除式, 约分后相乘; 加减法应先把分母分解因式, 再通分(不能去分母). 注意: 结果要化为最简分式.

11. **二次根式**:

① $()^2 = a (a \geq 0)$, ② $= |a|$, ③ $= \times$, ④ $= (a > 0, b \geq 0)$.

如: ① $(3)^2 = 45$. ② $= 6$. ③ $a < 0$ 时, $= -a$. ④ 的平方根 $= 4$ 的平方根 $= \pm 2$.

12. **一元二次方程**: 对于方程: $ax^2 + bx + c = 0$: ①**求根公式**是 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, 其中 $b^2 - 4ac$ 叫做根的判别式. 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$ 时, 方程没有实数根. 注意: 当 $\Delta \geq 0$ 时, 方程有实数根. ②若方程有两个实数根 x_1 和 x_2 , 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}$, 并且二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 可分解为 $a(x - x_1)(x - x_2)$. ③以 a 和 b 为根的一元二次方程是 $x^2 - (a+b)x + ab = 0$.

13. **解分式方程**(去分母或换元)和**无理方程**(两边平方或换元)必须检验. 形如: 的方程

元)和**无理方程**(两边平方或换元)必须检验. 形如: 的方程组, 用代入法解; 形如: 的方程组, 先把一个方程分解为两个一次方程, 再把这两个方程分别与另一个方程组合成两个方程组, 再用代入法分别解这两个方程组.

14. **不等式**两边都乘以或除以同一个负数, 不等号要改变方向.

15. **平面直角坐标系**:

①各限象内点的坐标如图所示.

②横轴(x轴)上的点, 纵坐标是

0; 纵轴(y轴)上的点, 横坐标是0.

③关于横轴对称的两个点, 横坐标相同(纵坐标互为相反数);

关于纵轴对称的两个点, 纵坐标相同(横坐标互为相反数);

关于原点对称的两个点, 横坐标、纵坐标互为相反数.

16. **一次函数** $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的图象是直线. 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大(直线从左向右上); 当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小(直线从左向右下降). 特别: 当 $b=0$ 时, $y=kx$ 又叫做正比例函数(y 与 x 成正比), 图象必过原点.

17. **反比例函数** $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象叫做双曲线. 当 $k > 0$ 时, 双曲线在一、三象限(从左向右降); 当 $k < 0$ 时, 双曲线在二、四象限(从左向右上升). 因此, 它的增减性与一次函数相反.

18. **二次函数** $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象叫做抛物线(c 是抛物线与 y 轴的交点的纵坐标). ① $a > 0$ 时, 开口向上; $a < 0$ 时, 开口向下. ② 顶点坐标是 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$, 对称轴是直线 $x=-\frac{b}{2a}$.

特别: 抛物线 $y=a(x-h)^2+k$ 的顶点坐标是 (h, k) , 对称轴是直线 $x=h$.

注意: 求解析式的设法

①已知三个点的坐标, 则设为一般形式 $y=ax^2+bx+c$; ②已知顶点坐标 (h, k) , 则设为顶点式 $y=a(x-h)^2+k$; ③已知抛物线与 x 轴的两个交点坐标 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$, 则设为交点式 $y=a(x-x_1)(x-x_2)$.

19. **抛物线与 x 轴的位置关系**:

对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ① $\Delta < 0$ 时, 它与 x 没有交点. ② $\Delta = 0$ 时, 它与 x 轴只有一个交点(与 x 轴相切). ③ $\Delta > 0$ 时, 它与 x 轴有两个交点 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$, 其中 x_1 和 x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

20. **统计初步**:

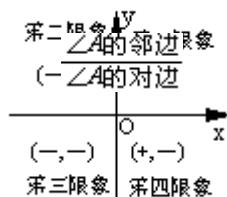
(1) **概念**: ①所要考察的对象的全体叫做**总体**, 其中每一个考察对象叫做**个体**. 从总体中抽取的一部份个体叫做总体的一个**样本**, 样本中个体的数目叫做**样本容量**. ②在一组数据中, 出现次数最多的数(有时不止一个), 叫做这组数据的**众数**. ③将一组数据按大小顺序排列, 把处在最中间的一个数(或两个数的平均数)叫做这组数据的**中位数**.

(2) **公式**: 设有 n 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 那么:

①**平均数** $=\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$. ②**方差** $S^2=[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2]$. (是整数时用)

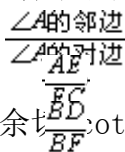
③**标准差** $S=\sqrt{S^2}$. 注: 各数据的数位较少或平均数是分数时, 用此公式.

④若将 n 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 各减去一个适当的数 a , 得到一组新数 $x_1', x_2', \dots, x_n'$, 那么原来那组数的方差 S^2 = 这组新数的方差, 平均数 $= a + \bar{x}'$. **方差越大, 这组数据的波动就越大**. 通常用样本方差去估计**总体方差**, 用**样本平均数**去估计**总体平均数**. 方差的算术平方根叫做**标准差**.



差

(3) **频率**: ①把一组数分成若干个小组, **组距**=(最大值-最小值)÷**组数**(求组数时, 用收尾法取整数), 这时, 落在某小组内的数据的个数叫做这组的**频数**, 每一小组的频数与数据总个数的比值叫做这一小组的**频率**. 因此, **各组的频率的和等于1**. 在频率分布直方图中, 各小长方形的面积等于相应各组的频率. **各小长方形的面积的和等于1**.



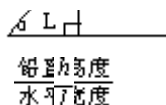
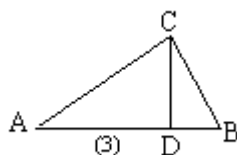
余弦: $\cos A = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$, $\angle A$ 的正切: $\tan A = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}}$, $\angle A$ 的余切: $\cot A = \frac{\text{邻边}}{\text{对边}}$.

并且 $\sin A = \cos B$, $\tan A = \cot B$, $\tan A \cot A = 1$, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. $0 < \sin A < 1$, $0 < \cos A < 1$, $\tan A > 0$, $\cot A > 0$. $\angle A$ 越大, $\angle A$ 的正弦和正切值越大, 余弦和余切值反而越小.

② **余角公式**: $\sin(90^\circ - A) = \cos A$, $\cos(90^\circ - A) = \sin A$, $\tan(90^\circ - A) = \cot A$, $\cot(90^\circ - A) = \tan A$.

③ **特殊角的三角函数值**:

$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$, $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = \cos 0^\circ = 1$, $\tan 30^\circ = \cot 60^\circ$, $\tan 45^\circ = \cot 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \cot 30^\circ$, $\tan 0^\circ = \cot 90^\circ = 0$.



④ **斜坡的坡度** $i = \frac{\text{铅直高度}}{\text{水平宽度}}$. 设坡角为 α , 则 $i = \tan \alpha$.

22. 三角形:

(1) 在一个三角形中: 等边对等角, 等角对等边.

(2). 证明两个三角形全等的方法有: SAS, AAS, ASA, SSS, HL.

(3) 在 $\text{Rt} \triangle$ 中, 斜边上的中线等于斜边的一半.

(4) 证明一个三角形是**直角三角形**的方法有:

①先证明有一个角等于 90° .

②先证明最长边的平方等于另两边的平方和.

③先证明一条边的中线等于这条边的一半.

(5) **三角形的中位线** 平行于第三边, 并且等于第三边的一半.

(6) **等腰三角形** 中, 顶角的平分线与底边上的中线和高三线重合.

23. 四边形:

(1) n 边形的内角和等于 $(n-2)180^\circ$, 外角和等于 360° .

(2) **平行四边形** 的性质: 对边平行且相等; 对角相等; 邻角互补; 对角线互相平分.

(3) 证明一个四边形是**平行四边形**的方法: ①先证两组对边平行. ②先证两组对边相等.

③先证一组对边平行且相等. ④先证两条对角线互相平分. ⑤先证两组对角分别相等.

(4) **矩形** 的对角线相等且互相平分; **菱形** 的对角线互相垂直平分, 并且四条边相等.

(5) 证明一个四边形是**矩形**的方法有: ①先证明它有三个角是直角. ②先证它是平行四边形, 再证它有一个角是直角或对角线相等.

(6) 证明一个四边形是**菱形**的方法有: ①先证明它的四条边相等. ②先证它是平行四边形, 再证它有一组邻边相等或对角线互相垂直.

(7) **正方形** 既是矩形又是菱形, 它具有矩形和菱形的所有性质.

(8) **梯形的中位线** 平行于两底并且等于两底之和的一半.

(9) **轴对称图形** 有: 线段, 角, 等腰三角形, 等腰梯形, 矩形, 菱形, 正方形, 正多边形, 圆. **中心对称图形** 有: 线段, 平行四边形, 矩形, 菱形, 正方形, 边数是偶数的正多边形, 圆.

24. 证明两个三角形相似的方法有:

①先证两组对应角相等.

②先证两边对应成比例并且夹角相等.

③先证三边对应成比例.

④先证斜边和一条直角边对应成比例. 相似三角形的性质: 对应高的比, 对应角平分线的比, 对应中线的比, 周长的比, 都等于相似比. 面积的比等于相似比的平方.

25. 平行切割定理:

①如图1, $DE \parallel BC$.

②如图2, 若 $AB \parallel CD \parallel EF$ 则 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

26. 射影定理: 如图3, $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle ACB=90^\circ$, $CD \perp AB$, 则: ① $AC^2=AD \cdot AB$. ② $BC^2=BD \cdot BA$. ③ $AD^2=DA \cdot DB$.

27. 圆的有关性质:

(1) **垂径定理**: 如果一条直线具备以下五个性质中的

任意两个性质:①经过圆

心;②垂直弦;③平分弦;④平分弦所对的劣弧;

⑤平分弦所对的优弧, 那么这条直线就具有另外三个性质. 注: 具备①, ③时, 弦不能是直径.

(2) 两条平行弦所夹的弧相等.

(3) 在同圆或等圆中, 如果两个圆心角、两条弧、两条弦、两条弦的弦心距中有一组量相等, 那么它所对应的其余三组量都分别相等.

(4) **圆心角**的度数等于它所对的弧的度数.

(5) 一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半.

(6) 圆周角等于它所对的弧的度数的一半.

(7) **弦切角**等于它所夹的弧的度数的一半.

(8) 同弧或等弧所对的圆周角相等.

(9) 在同圆或等圆中, 相等的圆周角所对的弧相等.

(10). 90° 的圆周角所对的弦是直径.

(11) **圆内接四边形的**对角互补, 外角等于它的内对角.

28. 直线和圆的位置关系:

(1) 若 $\odot O$ 的半径为 r , 圆心到直线 L 的距离为 d , 则:

① $d < r$ 直线 L 和 $\odot O$ 相交. ② $d = r$ 直线 L 和 $\rightleftharpoons \odot O$ 相切. ③ $d > r$ 直线 L 和 $\odot O$ 相离.

(2)切线的判定定理:经过半径外端并且垂直这条半径的直线是圆的切线. 反之:切线垂直过切点的半径.

(3)切线长定理,弦切角定理,相交弦定理及其推论,切割线定理及其推论.

(4) 三角形的内切圆的圆心叫做三角形的**内心**. 三角形的内心就是三内角平分线的交点. 三角形的外接圆的圆心叫做三角形的**外心**. 三角形的外心就是三边中垂线的交点.

(5) Rt $\triangle$ 的内切圆的半径 $R_{\text{内}} =$, 任意多边形 $\frac{2S}{\text{周长}}$ 形的内切圆的半径 $R_{\text{内}} =$.

(6) 圆外切四边形的一组对边的和等于 $\frac{1}{2}$ 周长 另一组对边的和.

29. 圆和圆的位置关系:

(1) 设两圆半径为 R 和 r , 圆心距为 d , $\Leftrightarrow$ 则: ① $d > R + r$ 两圆外离.